Lecture 8

**Limits and Continuity**

The development of calculus in the seventeenth century by Newton and Leibniz provided scientists with their first real understanding of what is meant by an “instantaneous rate of change” such as velocity and acceleration. Once the idea was understood conceptually, efficient computational methods followed, and science took a quantum leap forward. The fundamental building block on which rates of change rest is the concept of a “limit,” an idea that is so important that all other calculus concepts are now based on it.

In mathematics, the limit of a function is a fundamental concept

in analysis concerning the behavior of that function near a particular input.

Formal definitions, first devised in the early 19th century.

***y=f(х)***  функциясы қандай да бір *х0* нүкте маңайында анықталған болсын.

To say that

 \lim_{x \to p}f(x) = L, \, 

means that *ƒ*(*x*) can be made as close as desired to *L* by making *x* close enough, but not equal, to *p*.

The following definitions (known as [(ε, δ)-definitions](http://en.wikipedia.org/wiki/(%CE%B5,_%CE%B4)-definition_of_limit)) are the generally accepted ones for the limit of a function in various contexts.

### Limit of a sequence

### Formally, suppose a1, a2, ... is a sequence of real numbers. It can be stated that the real number L is the limit of this sequence, namely:

 \lim_{n \to \infty} a_n = L 

to mean for every real number ε > 0, there exists a natural number n0 such that for all n > n0, |an − L| < ε.

### Functions on the real line

Suppose *f* : **R** → **R** is defined on the [real line](http://en.wikipedia.org/wiki/Real_line) and ***x0****, A* ∈ **R**. It is said **the limit of *f* as *x* approaches *x0*  is *A*** and written

******

if the following property holds:

For every real *ε* > 0, there exists a real *δ* > 0 such that for all real *x*, 0 < | *x* − *x0* | < *δ*  implies | *f*(*x*) − *A* | < *ε*.

Note that the value of the limit does not depend on the value of *f*(*x0*), nor even that *x0* be in the domain of  *f*.

Solve the inequality : .

Interval  is named **-**neighborhood of .

Similarly solve the inequality : .

Interval  is named **-**neighborhood of *А*.

|  |
| --- |
| y  *А+*  *y=f(x)*  *A*  *A+*  0 x0- x0 х0 + x |

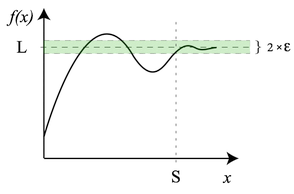
If the extended real line R is considered, i.e., R ∪ {-∞, ∞}, then it is possible to define limits of a function at infinity.

If  *f*(*x*) is a real function, then **the limit of *f* as *x* approaches infinity is *L***, denoted

 \lim_{x \to \infty}f(x) = L,

if for all \varepsilon > 0, there exists *S* > 0 such that |f(x) - L| < \varepsilon whenever *x* > *S*. Or, symbolically:

\forall \varepsilon >0 \; \exists S >0 \; \forall x \in I \; (x > S \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)



Similarly, **the limit of *f* as *x* approaches negative infinity is *L***, denoted

 \lim_{x \to -\infty}f(x) = L,

if for all \varepsilon > 0 there exists *S* < 0 such that |f(x) - L| < \varepsilon whenever *x* < *S*. Or, symbolically:

\forall \varepsilon >0 \; \exists S <0 \; \forall x \in I \; (x < S \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)

**ONE-SIDED LIMITS**

The limit in (6) is called a two-sided limit because it requires the values of f(x) to get closer and closer to L as values of x are taken from either side of x = a. However, some functions exhibit different behaviors on the two sides of an x-value a, in which case it is necessary to distinguish whether values of x near a are on the left side or on the right side of a for purposes of investigating limiting behavior. For example, consider the function



which is graphed in Figure 1. As *x* approaches 0 from the *right*, the values of *f(x)* approach a limit of 1 [in fact, the values of *f(x)* are exactly 1 for all such *x*], and similarly, as *x* approaches 0 from the *left*, the values of *f(x)* approach a limit of −1.

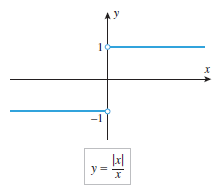


Figure 1.

We denote these limits by writing



With this notation, the superscript “+” indicates a limit from the right and the superscript “−” indicates a limit from the left.

This leads to the general idea of a ***one-sided limit***.

One-sided limits (an informal view):

1) If the values of *f(x)* can be made as close as we like to *A* by taking values of *x* sufficiently close to *x*0 (), but greater than *x*0 (), then we write

This expression is read “the limit of *f(x)* as *x* approaches *x*0from the right is *A*” or “*f(x)* approaches *A* as *x* approaches *x*0from the right.”

2) If the values of *f(x)* can be made as close as we like to *A* by taking values of *x* sufficiently close to *x*0 (), but less than *x*0 (), then we write

Similarly, this expression is read “the limit of *f(x)* as *x* approaches *x*0from the left is *A*” or “*f(x)* approaches *A* as *x* approaches *x*0from the left.”

**The relationship between one-sided andtwo-sided limits.** The two-sided limit of a function *f(x)* exists at *a* if and only if both of the one-sided limits exist at *a* and have the same value; that is,

****** if and only if ******.

**Properties.** Let existed limites of functions  and  as *x* approaches *x0* ***(***):  and .

1. Limit of the sum is the sum of the limits

=.

2. Limit of the product is the product of limits

=.

**Сonsequence.** A constant factor can be moved through a limit symbol

=*С*, here *С* - const.

3. The limit of a quotient is the quotient of the limits, provided the limit of the denominator is not zero

=.

**Example. 1)** Find

****

*Solution*. The numerator and the denominator both have a zero at *x* = −4, so there is a common factor of *x* − *(*−4*)* = *x* + 4. Then



2)  функциясының  жағдайдағы шегін табу керек.

*Solution*. Қысқаша айтсақ  шек есептеу керек. Функция шегінің қасиеттерін қолданып есептейік:

.

функциясының  жағдайдағы шегі 4 болады екен.

A quotient *f(x)/g(x)* in which the numerator and denominator both have a limit of zero as *x*→*a* is called an ***indeterminate form of type* 0***/***0**.

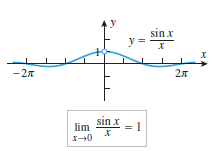
The problem with such limits is that it is difficult to tell by inspection whether the limit exists, and, if so, its value. Informally stated, this is because there are two conflicting influences at work. The value of f(x)/g(x) would tend to zero as f(x) approached zero if g(x) were to remain at some fixed nonzero value, whereas the value of this ratio would tend to increase or decrease without bound as g(x) approached zero if f(x) were to remain at some fixed nonzero value. But with both f(x) and g(x) approaching zero, the behavior of the ratio depends on precisely how these conflicting tendencies offset one another for the particular f and g.

Sometimes, limits of indeterminate forms of type 0/0 can be found by algebraic simplification, as in the last example, but frequently this will not work and other methods must be used. We will study such methods in later sections.

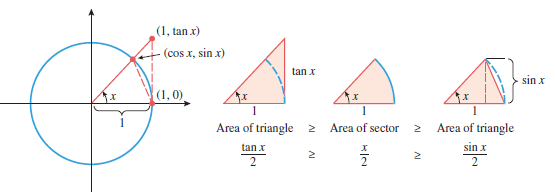
**The first and second remarkable limits**

**Theorem. The function ** is not defined at the point *x=0*, but it has a limit *x* approaches *0* ()

****

****

proven for 0 < x < π/2:



Dividing everything by sin(x) yields

1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}

1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}

\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1

\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1

\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1

.

**Сonsequence***:*

**1) , 2) , 3).**

**Example.** а) .

б) .

**Теорема. The function ** has a limit *x* approaches infinity () and

****

**Сonsequence***:*

**1) ,** *a=e болғанда* **;**

**2) ,**  *a=e болғанда* **;**

**3) **

**Example. а)** екенін көрсет.

**Шешуі**.  деген білгілеу енгізейік. Осыдан . Және де  кезде . Енді шек есептесек

**.**

б)****

****

****

# Infinitely small and infinitely large values

**Анықтама.** *** функциясының  жағдайда шегі ноль болса, яғни , онда  функциясы  жағдайда ақырсыз аз функция деп аталады.***

Осы анықтаманы “” тілінде былай да айтуға болады: Кез келген  үшін  саны табылып,  теңсіздігін қанағаттандыратын барлық х-тер үшін  теңсіздігі орындалса,  функциясы  жағдайда **ақырсыз аз функция** деп аталады.

**Ақырсыз аз функция қасиеттері.**

1. Егер  функциясының  жағдайда *А* шегі бар болса, онда  функциясын осы А саны мен  жағдайда ақырсыз аз болатын  функцияқосындысы түрінде жазуға болады,яғни .
2. Ақырсыз аз функцияның шенелген функцияға (сонмен қатар, тұрақтыға, басқа ақырсыз азға) көбейтіндісі ақырсыз аз функция болады.
3. Ақырсыз аз функцияның шегі нолден өзге функцияға қатынасы ақырсыз аз функция болады.

**Анықтама.**  функциясының  жағдайда шегі шексіздік болса, яғни , онда  функциясы  жағдайда **ақырсыз үлкен функция** деп аталады.

Ақырсыз аз функция мен ақырсыз үлкен функция арасында мынадай байланыс бар: ***Егер  функциясы  жағдайда ақырсыз аз болса,  функциясы  жағдайда ақырсыз үлкен болады.***

**Мысалы**,  функциясы  жағдайда ақырсыз аз функция болады.

Шынында да,  шегін есептейік.

.

Ал  функциясы  жағдайда ақырсыз үлкен функция болады, яғни оның шегі шексіздік.

Шынында да, шегін есептейік.

.

Мұндағы  қатынасты шектер тілінде “ақырсыз азға кері шама ақырсыз үлкен” дейді де, шексіздікке теңестіреді.

Ақырсыз аз функциялар нолге әртүрлі жылдамдықпен жақындайды. Көптеген жағдайда ақырсыз аздардың нолге ұмтылу жылдамдығын анықтау үшін оларды өзара салыстыру керек болады. Салыстыру үшін олардың қатынасының  жағдайдағы шегін қарастырады.

***A comparison of infinitesimal\***

***Айталық  және   жағдайда ақырсыз аз функциялар және  болсын. Онда, егер***

***1)  болса  -ға қарағанда жоғары ретті ақырсыз аз деп;***

***2)  болса  мен  бірдей ретті ақырсыз аз деп;***

***3)  болса  мен  эквивалентті ақырсыз аз деп***

***аталады.***

 мен  эквивалентті дегенді  ~ деп жазады.

Егер  функциясы  жағдайда ақырсыз аз болса, онда

1. , ,

, ;

2. , ;

3. , ;

4. , ;

5. .

1.-5. қатынастар эквивалентті функциялар кестесін береді. Бұл кестені шек есептеу кезінде мына теоремаға сүйеніп қолдануға болады.

**Теорема.** Егер  жағдайда ~ және ~болса, онда

***.***

**Мысал.**  . Мұнда  жағдайда  болғандықтан  орнына  алынды.

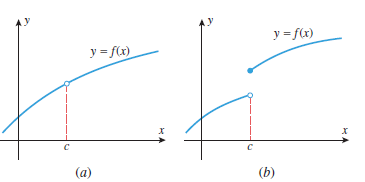
**DEFINITION OF CONTINUITY**

Intuitively, the graph of a function can be described as a “continuous curve” if it has no breaks or holes. To make this idea more precise we need to understand what properties of a function can cause breaks or holes. Referring to Figure 1., we see that the graph of a function has a break or hole if any of the following conditions occur:

• The function f is undefined at c (Figure 1a).

• The limit of f(x) does not exist as x approaches c (Figures 1b, 1c).

• The value of the function and the value of the limit at c are different (Figure 1d).

****

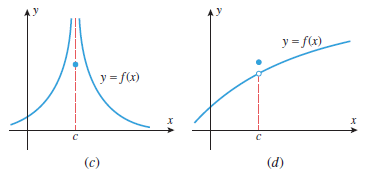
****

Figure 1.

**Definition** A function *f* is said to be continuous at c provided the following conditions are satisfied:

**1.** *f(c)* is defined.

**2. ****exists.

**3. ****

 функциясы қандай да бір аралықтың үзіліссіз болуы үшін, ол сол аралықтың әрбір нүктесінде үзіліссіз болуы керек.

**Some properties of continuous functions.**

*1. If the functions f and g are continuous at c, then*

(*a*) *f* + *g is continuous at c.*

(*b*) *f* − *g is continuous at c.*

(*c*) *fg is continuous at c.*

(*d* ) *f /g is continuous at c if g(c)* is not zero 0 *and has a discontinuity at c if g(c)* = 0*.*

2. If  *is continuous at* , and  *is continuous at* , *then* *the function* *is continuous at* . That is

.

If a function *f* is continuous at each number in an open interval *(a, b)*, then we say that *f* is ***continuous on* (*a, b*)**.

A function *f* is said to be ***continuous on a closed interval* [*a, b*]**

if the following conditions are satisfied:

**1.** *f* is continuous on *(a, b)*.

**2.** *f* is continuous from the right at *a*.

**3.** *f* is continuous from the left at *b*.

an instance of breaking or bursting suddenly and completely.

**Анықтама. * функциясының  жағдайда шегі функцияның сол нүктедегі мәніне тең болмаса, яғни , функция  нүктесінде үзілісті функция деп, ал нүктені функцияның үзіліс нүктесі деп атайды.***

**Анықтама. *Функцияның  нүктесінде өз-ара тең емес ақырлы біржақты шектері бар болса,  нүктесі функцияның Rupture of the first kind . Кейде оны ақырлы секіріс деп*** (10а-сурет) ***атайды.***

**Анықтама. *Функцияның  нүктесіндегі ақырлы біржақты шектердің ең болмағанда біреуі жоқ болса,  нүктесі функцияның ІІ-текті үзіліс нүктесі деп аталады*** (10б-сурет)***.***

**Мысал.** а)  функциясы  нүктесінде үзіліссіздікке зертте.

**Шешуі.** 

,

яғни сол жақты шегі –1, ал оң жақты шегі 1, ақырлы сандар, өз-ара тең емес, олай болса  нүктесі І-текті үзіліс нүктесі болады (10а-сурет).

1

0 1 x

y

0 x

1

y

-1

0 2 x

1

y

б)  функциясын үзіліссіздікке зертте.

**Шешуі**. Функция  аралығында анықталған.  нүктесіндегі біржақты шектерді табайық.



,

яғни сол жақты шегі 0, ал оң жақты шегі шексіздік. Олай болса  нүктесі ІІ-текті үзіліс нүктесі болады (10б-сурет).

в)  функциясын үзіліссіздікке зертте.

**Шешуі.** Функция  аралығында анықталған.  нүктесіндегі біржақты шектерді табайық.



,

яғни сол жақты де, оң жақты шегі де шексіздік. Олай болса  нүктесі ІІ-текті үзіліс нүктесі болады (10в-сурет).